BERBAGAI MODEL FUNGSI PRODUKSI

Oleh : Merry Marianti Dra., MSi.[1]

PENGERTIAN FUNGSI PRODUKSI

Yang dimaksud dengan fungsi produksi yaitu suatu fungsi yang menggambarkan hubungan antara Output (hasil produksi) sebagai peubah (variabel) tak bebas dengan input-inputnya (faktor produksi) sebagai peubah bebas. Apabila bentuk fungsinya telah diketahui atau telah diestimasi, maka kita dapat meramalkan besarnya output apabila input-inputnya berubah. Juga kita dapat mengetahui besarnya peran masing-masing input dalam pertumbuhan ataupun peningkatan output. Fungsi produksi ini dapat digunakan untuk level perusahaan, level industri ataupun level nasional (aggregat output).

JENIS-JENIS FUNGSI PRODUKSI

1. FUNGSI PRODUKSI NEO KLASIK

Fungsi produksi dalam teori perusahaan tradisional menggambarkan Output (Q) sebagai fungsi dari dua input yaitu Modal (K) dan Tenaga Kerja (L). Modelnya adalah:

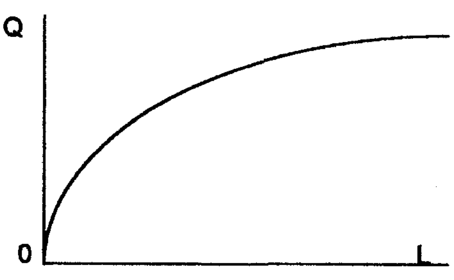
$$Q = Q(K, L) \quad \ldots\ldots (1)$$

Variabel Q, K dan L adalah variabel aliran. Jadi persamaan (1) di atas menunjukkan suatu aliran output sebagai fungsi dari dua faktor input. Semua variabel diasumsikan bersifat kontinyu dan *infinitely divisible*. Input-input diasumsikan dapat disubstitusikan secara kontinyu pada semua level produksi, oleh karena itu suatu output dapat diproduksi dengan berbagai alternatif kombinasi input (Leighton,1988:208) Jadi, permasalahan dalam model ini adalah menentukan kombinasi input untuk memproduksi sejumlah output tertentu pada biaya yang minimum.

Fungsi produksi ini diasumsikan sedemikian rupa sehingga Produk Marjinal Modal ($\partial Q/\partial K$) dan Produk Marginal Tenaga Kerja ($\partial Q/\partial L$) selalu positive tetapi semakin mengecil (diminishing). Hal ini terkenal dengan sebutan Hukum Produktivitas Marjinal yang semakin berkurang/mengecil (Law of Diminishing Marginal Productivity).(Leighton,1988:209)

Sebagai contoh yaitu:

1) Jika input modal tetap, dan input tenaga kerja ditambah, output akan bertambah, tetapi pertambahannya semakin mengecil.

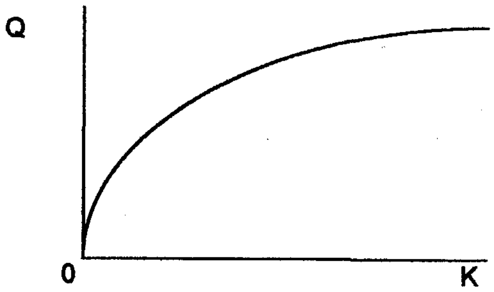


$MP_L = \partial Q/\partial L = f_L\,(K^o, L)$

2) Jika input tenaga kerja tetap dan input modal ditambah, output akan bertambah, tetapi pertambahannya semakin mengecil.

---

[1] Penulis adalah staf pengajar tetap pada Fakultas Ekonomi Unpar.



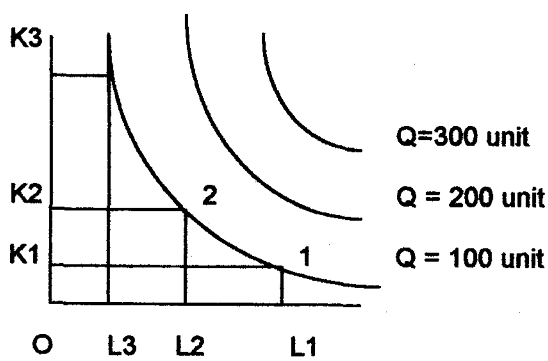
$MP_K = \partial Q/\partial K = f_K\ (K,L^0)$

Pada Fungsi Produksi Neo Klasik dikenal istilah Isoquant. Isoquant adalah suatu kurva yang menggambarkan berbagai kemungkinan kombinasi input untuk menghasilkan sejumlah output tertentu. Misalkan untuk menghasilkan output sebesar 100 unit dapat digunakan kombinasi input dengan alternatif:

1. L1, K1
2. L2, K2
3. L3, K3

Dst.

3



Kemiringan kurva isoquant yang negatif disebut Marginal Rate of Substitution (Tingkat Substitusi Marginal). Total diferensial dari fungsi produksi ini yaitu:

$dQ = \partial Q/\partial K\ dK + \partial Q/\partial L\ dL = 0$

($dQ = 0$ karena berada pada isoquant yang sama, berarti Q tetap /tidak berubah).

Jadi : $MRS = -\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \dfrac{MP_L}{MP_K}$

Marginal Rate of Substitution (MRS) berguna untuk mengukur sejauh mana dapat dilakukan substitusi antara suatu faktor produksi dengan faktor produksi lainnya dalam memproduksi sejumlah output tertentu. MRS tergantung pada satuan ukuran K dan L yang digunakan.

Suatu ukuran lain yang tidak tergantung pada ukuran yang digunakan yaitu Elastisitas Subsitusi (The Elastisity of Substitution). Elastisitas Substitusi merupakan proporsi perubahan rasio Modal dan Tenaga Kerja dibagi proporsi perubahan rasio MRS. Elastisitas Substitusi dinyatakan dengan σ.

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L} \Big/ \frac{d\,(MRS)}{MRS}$$

2. FUNGSI PRODUKSI COBB DOUGLAS (CDPF)

Fungsi produksi yang banyak digunakan dalam penelitian empirik adalah Fungsi Produksi Cobb-Douglas. Pada tahun 1928 peneliti Douglas bekerja sama dengan koleganya yang bernama Charles Cobb (seorang ahli Matematika terapan) mempublikasikan hasil penelitiannya di Amerika Serikat. Ia menggunakan data tahunan periode waktu 1899 - 1922.

Penelitiannya menggunakan model fungsi produksi :

$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ ....(2)

Parameter Fungsi Produksi Cobb-Douglas merupakan Elastisitas Output terhadap masing-masing inputnya (diasumsikan konstan dan nilainya antara 0 dan 1).Fungsi Produksi Cobb-Douglas mempunyai asumsi bahwa jumlah parameternya sama dengan satu, yaitu $\alpha + \beta = 1$

sehingga fungsi produksi ini merupakan Fungsi Produksi Homogen berderajat satu atau Fungsi Homogen Linier. Bukti :

Jika $\alpha + \beta = 1$ maka $\beta = 1 - \alpha$

Jadi $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

Jika input diperbesar sehingga menjadi t x input semula, maka output juga menjadi t x output semula.

$$\begin{aligned} Q(tK, tL) &= A(tK)^{\alpha}(tL)^{1-\alpha} \\ &= A t^{\alpha} K^{\alpha} t^{1-\alpha} L^{1-\alpha} \\ &= t(AK^{\alpha}L^{1-\alpha}) \\ &= t\,Q(K,L) \end{aligned}$$

Ciri khas Fungsi Produksi Cobb-Douglas yaitu Parameter α dan β yang merupakan elastisitas output terhadap masing-masing inputnya bersifat konstan.

Jika Fungsi Produksi Cobb-Douglass dimasukkan dalam model Profit Maximum atau Cost Minimum akan menghasilkan Elastisitas Substitusi yang konstan dan nilainya selalu sama dengan satu ($\sigma = 1$).(Leighton,1988:213)

Dalam bentuk log-log Fungsi Produksi Cobb-Douglas menjadi :

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L \quad \text{..........(3)}$$

jika $\alpha + \beta = 1$ maka $\beta = 1 - \alpha$

maka $\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L$

$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K - \alpha \ln L + \ln L$

$\ln Q - \ln L = \ln A + \alpha(\ln K - \ln L)$

$$\ln Q/L = \ln A + \alpha \ln K/L \quad \text{..........(4)}$$

Persamaan di atas menghubungkan produktivitas tenaga kerja rata-rata (Q/L) dengan rasio modal - tenaga kerja (K/L).

Seperti telah dikemukakan, Fungsi Produksi Cobb-Douglas mempunyai asumsi $\alpha + \beta = 1$. Jika tidak diasumsikan $\alpha + \beta = 1$ maka :

$$\begin{aligned} Q(tK, tL) &= A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} \\ &= A t^{\alpha}K^{\alpha} + t^{\beta}L^{\beta} \\ &= t^{(\alpha+\beta)} AK^{\alpha}L^{\beta} \\ &= t^{(\alpha+\beta)} Q(K,L). \end{aligned}$$

Jadi bila $\alpha + \beta > 1$ maka kita akan mendapatkan hasil yang bersifat Increasing Return to Scale, sedangkan bila $\alpha + \beta < 1$ kita akan mendapatkan hasil yang bersifat Decreasing Return to Scale.

Fungsi Produksi diasumsikan membentuk isoquant yang convex to the origin (cembung terhadap titik pusat). Dalam kasus 2 dimensi fungsi produksi adalah Strictly Concave jika : $f_{11} < 0$ dan $f_{22} < 0$

dan $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ (dimana $f_{12} = f_{21}$)

yaitu kondisi tingkat kedua (second order condition) terpenuhi.

3. CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION PRODUCTION FUNCTION (CESPF)

Fungsi Produksi Cobb-Douglas mempunyai elastisitas substitusi (σ) yang bersifat konstan dan nilainya selalu sama dengan satu. Untuk mengatasi kekakuan Fungsi Produksi Cobb-Douglas ini para peneliti mencari bentuk lain yang lebih fleksibel.

Pada tahun 1961 Arrow, Chenery, Minhas dan Solow berhasil mengembangkan Fungsi Produksi Cobb-Douglas menjadi Fungsi Produksi yang terkenal dengan sebutan Constant Elasticity of Substitution Production Function, yaitu:(Leighton,1988:215)

$$Q = \gamma\,[\delta K^{\theta} + (1-\delta)L^{\theta}]^{-1/\theta} \quad \text{..........(5)}$$

Elastisitas Substitusinya adalah $\sigma = 1/(1+\theta)$

dimana γ = parameter efisiensi

δ = parameter distribusi

θ = parameter substitusi

Perbedaan CESPF dengan Fungsi Produksi Cobb-Douglas :

- Pada CESPF Elastisitas Substitusi (σ) belum tentu sama dengan 1
- Pada CDPF Elastisitas Substitusi (σ) selalu sama dengan 1

Persamaan CESPF dan CDPF :
Elastisitas Substitusi (σ) bersifat konstan/tetap.
Jadi kesimpulannya :

- CDPF adalah bentuk khusus dari CESPF pada kasus dimana $\theta = 0$ dan $\sigma = 1$

CESPF diatas mempunyai sifat Constant Return to Scale dan dapat digeneralisir menjadi: (Leighton, 1988:216)

$$Q = \gamma\,[\delta K^{\theta} + (1-\delta)L^{\theta}]^{-v/\theta} \qquad \text{..(6)}$$

Fungsi ini adalah Fungsi Homogen berderajat v sebab $Q(\lambda K,\lambda L) = \lambda^{v}\,Q(K,L)$
dimana v adalah "parameter Return to Scale"
jika : $v = 1$ maka Constant Return to Scale
$v > 1$ maka Increasing Return to Scale
$v < 1$ maka Decreasing Return to Scale

4. VARIABLE ELASTICITY OF SUBSTITUTION PRODUCTION FUNCTION (VESPF).

Pada CESPF Elastisitas Substitusi (σ) dianggap konstan, padahal σ mungkin saja bervariasi pada rasio K/L yang berbeda. Misalnya pada saat Intensitas Modal untuk produksi tinggi, maka semakin kecil kemungkinan untuk mensubstitusi lebih lanjut Modal terhadap Tenaga Kerja. Dan walaupun rasio K/L tetap, σ dapat saja berubah sepanjang waktu akibat pengaruh perkembangan teknologi.(Leighton, 1988:241)

Berdasarkan alasan tersebut diatas maka CESPF dikembangkan lebih lanjut menjadi VESPF. Mula-mula pada tahun 1971 Revankar membuat suatu model dimana σ merupakan fungsi linier dari K/L ratio. Dan pada tahun 1968 ia juga membuat suatu model dimana σ bervariasi sesuai perubahan waktu. Akhirnya Christensen, Jorgenson and Lau (1973) membuat model yang disebut Transcendental Logarithmic Production Function atau disingkat Translog Production Function. Bentuk modelnya adalah sebagai berikut: (Leighton,1988:242)

$$\mathrm{Log}Q = \beta_0 + \beta_K \mathrm{Log}K + \beta_L \mathrm{Log}L + \beta_{KK}(\mathrm{Log}K)^2 + \beta_{LL}(\mathrm{Log}L)^2 + \beta_{LK}\mathrm{Log}K\,\mathrm{log}L$$

Bentuk translog ini merupakan suatu Second Order Taylor's series dalam logaritma. Keuntungan model ini yaitu mudah diestimasi. Fungsi produksi ini memiliki kelebihan daripada CDPF atau CESPF karena menghasilkan Return to Scale yang tidak sama untuk semua nilai input. Griliches dan Ringstad mendapatkan pada hasil penelitiannya bahwa pada perusahaan kecil produksinya Increasing Return to Scale tetapi untuk perusahaan yang besar produksinya mendekati Constant Return to Scale. Juga fungsi produksi ini bersifat lebih fleksibel daripada CDPF atau CESPF karena memiliki σ yang bersifat variabel (bukan konstan).

SIFAT-SIFAT FUNGSI PRODUKSI

Ada fungsi produksi yang memiliki sifat Homotetik dan Homogen. Fungsi produksi yang Homogen pasti bersifat Homotetik pula, karena fungsi produksi Homogen merupakan bagian dari fungsi produksi yang bersifat Homotetik, tetapi fungsi produksi Homotetik belum tentu Homogen, bisa saja Non Homogen.

1. HOMOGENITAS FUNGSI PRODUKSI

Menurut Silberberg:

> *A Production function is homogeneous of degree r if when all inputs are increased (decreased) by the same proportion, output increases (decreases) y the r th power of that increase. Formally, if $f(x_1,x_2,....x_n)$ is Homogeneous of degree r, $f(tx_1,...,tx_n) \equiv t^r f(x_1,...,x_n)$.* (Silberberg,1978:301)

r menunjukkan derajat Homogenitas.
jika r = 1 berarti Fungsi Homogen berderajat 1 (Fungsi Homogen linier)
r = 2 berarti Fungsi Homogen berderajat 2 dan seterusnya
Sifat yang dimiliki oleh Fungsi Homogen antara lain yaitu :

$$f_i\,(tx_1,.......,tx_n) \equiv f_i\,(x_1,........,x_n)$$
$$f_j\,(tx_1,.......,tx_n) \equiv f_j\,(x_1,.........,x_n)$$

that the slopes of the level curves are the same along every point of given ray out of the origin. (Silberberg,1978:301)

Namun yang memiliki sifat seperti ini bukan hanya Fungsi Homogen, Fungsi Homothetik pun memiliki sifat seperti ini.

2. HOMOTETISITAS FUNGSI PRODUKSI

Menurut Varian:

A homothetic function is a monotonic transformation of a function that is homogeneous of degree 1. In other words, f(x) is homothetic if and only if it can be written as f(x) = g(h(x)) where h (.) is homogeneous of degree 1 and g(.) is a monotonic function.(Varian,1992:18)

Jadi fungsi Homotetik adalah transformasi yang terus meningkat dari fungsi produksi yang homogen. Fungsi Produksi yang homotetik dikarakterisasikan dengan garis lurus expansion path yang melalui titik origin (titik nol). Silberberg mengatakan dalam bukunya, bahwa:

Still another way to express homotheticity is to state that the output elasticity for all factors are equal at any given point. That is, $\varepsilon_{1yo} = \varepsilon_{2yo} = \varepsilon_{nyo.}$ *This is clear from the geometry of straight-line expansion path.* (Varian, 1992:18)

KEMAJUAN TEKNOLOGI (TECHNICAL PROGRESS)

Salah satu faktor yang merupakan sumber pertumbuhan output yang penting adalah kemajuan teknologi. Kemajuan teknologi dapat bersumber dari peningkatan produktivitas tenaga kerjanya, misalnya karena tenaga kerja lebih sehat, lebih trampil, lebih terdidik, atau lebih bermotivasi untuk bekerja. Kemajuan teknologi dapat bersumber dari mesin tipe baru yang lebih produktif, jadi berasal dari peningkatan produktivitas modal. Ada pula kemajuan teknologi yang tidak berkaitan langsung dengan peningkatan kualitas atau produktivitas dari tenaga kerja (L) atau mesin (K), tetapi bersumber pada misalnya perbaikan organisasi produksi, yang meningkatkan efisiensi kerja baik dari K maupun dari L.(Budiono, 1988:134)

- **KEMAJUAN TEKNOLOGI YANG NETRAL MENURUT HARROD, SOLOW, HICKS.**

Ekonom membedakan tiga macam kemajuan teknologi yang bersifat sederhana.(Budiono, 1988:137)

Pertama : kemajuan teknologi yang khusus meningkatkan efisiensi setiap unit tenaga kerja.

Modelnya : $Q = F(K,N)$ dan $N = e^{mt}L$

atau $Q = F(K, e^{mt}L)$

dimana

Q = output, K = modal, L = tenaga kerja, N = jumlah tenaga kerja efektif,

m = indeks waktu, t = laju kemajuan teknologi.

Kemajuan teknologi ini disebut Kemajuan Teknologi yang Netral menurut Harrod. Ciri khusus kemajuan teknologi ini adalah bahwa ia tidak mempengaruhi koefisien Capital-Output ratio, karena hanya mempengaruhi L atau N saja. Model ini cocok untuk model-model pertumbuhan yang mensyaratkan adanya Capital-Output Ratio yang konstan pada posisi keseimbangannya. Misalnya Model Harrod Domar dan Model Solow Swan.

Kedua : Kemajuan teknologi yang meningkatkan produktivitas kapital (mesin) tetapi tidak mempengaruhi tenaga kerja.

Modelnya : $Q = F(K,L)$

$Q = F(e^{mt}K,L)$

Kemajuan teknologi ini disebut Kemajuan Teknologi yang Netral menurut Solow dan model ini mempunyai ciri bahwa Capital-Output Ratio tidak bisa dipertahankan pada suatu nilai yang konstan.

Ketiga : Kemajuan teknologi yang meningkatkan produktifitas K dan L secara seimbang.

Modelnya : $Q = e^{mt}F(K,L)$

Kemajuan teknologi ini disebut Kemajuan Teknologi yang Netral menurut Hicks. Kemajuan teknologi ini menggeser seluruh fungsi produksi. Contoh kemajuan teknologi ini adalah perbaikan organisasi (manajemen) produksi, yang meningkatkan produktivitas mesin maupun pekerja secara menyeluruh. Kemajuan teknologi ini tidak dapat memenuhi persyaratan Capital-Output Ratio yang konstan, sehingga tidak cocok bagi model yang mensyaratkan adanya Capital Output Ratio yang konstan.

- **EMBODIED DAN DISEMBODIED TECHNICAL PROGRESS.**

Perubahan teknis dapat dianalisa dan diestimasi menggunakan fungsi produksi. Salah satu jenis perubahan teknis adalah yang menunjukkan adanya *shift* dalam fungsi produksi dari waktu ke waktu, yang mencerminkan adanya peningkatan efisiensi dalam kombinasi input. Perubahan teknis ini disebut *Disembodied Technical Change* (Intriligator, 1978:289), dan itu dapat dinyatakan dengan fungsi produksi: $\mathbf{Y = f(L, K, t)}$ i.e $\mathbf{Y(t) = f(L(t), K(t), t)}$ dimana t adalah waktu.

Jenis perubahan teknis ini disebut "Disembodied" sebab ia terpisah dari faktor-faktor input, dan menunjukkan adanya reorganisasi dari input-input yang digunakan. Jadi output dapat meningkat tanpa adanya peningkatan input dikarenakan adanya kemajuan teknologi yang digunakan.

Untuk model fungsi produksi Cobb-Douglas: $\mathbf{Y = (A_0 e^{mt}) L^{\alpha} K^{\beta}}$ Dalam bentuk natural logarithm menjadi: $\mathbf{\ln Y = a_0 + \alpha \ln L + \beta \ln K + mt}$ dimana $a_0 = \ln A_0$ dan m = tingkat technical change.

Studi lain yang dilakukan Brown (Intriligator, 1978:289), mengestimasi model : $\mathbf{\Delta \ln Y = \alpha \Delta \ln L + \beta \Delta \ln K + m}$ dimana m menunjukkan tingkat technical change.

Selain Disembodied Technical Change, adapula model yang menunjukkan *Embodied Technical Change*, yaitu peningkatan efektivitas dari faktor input yang disebabkan berbagai pengembangan dalam kualitas atau efisiensi input-input dari waktu ke waktu. (Intriligator, 1978:291)

DERET TAYLOR SEBAGAI PENDEKATAN TERHADAP FUNGSI PROODUKSI

Kita dapat melakukan suatu pendekatan terhadap suatu fungsi y=f(x) dengan bentuk polinomial, dimana koefisiennya merupakan nilai turunan dari fungsi tersebut yaitu $f'(x_o)$, $f''(x_o)$ dan seterusnya. Ada dua cara melakukan pendekatan ini yaitu menggunakan Mclaurin Series atau Taylor Series (Deret Taylor).

Secara umum Taylor expansion dapat ditulis: (Chiang, 1984:257)

$$f(x) = \frac{f(x_o)}{0!} + \frac{f^1(x_o)}{1!}(x - x_o) + \frac{f^2(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

n menunjukkan tingkat ekspansi. Dalam hal fungsi translog biasanya dilakukan sampai ekspansi tingkat 2 (second approximation).

Aproksimasi tingkat dua fungsi produksi Q = f (z) dimana $z = (Z_1 \ldots Z_n)$,

adalah: $$Q(z) = f(z^*) + \sum \frac{\delta f}{\delta Z_i} z^* (Z_i - Z_i^*)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\delta^2 f}{\delta Z_i \delta Z_j} z^* (Z_i - Z_i^*)(Z_j - Z_j^*)$$

dimana $z^* = (Z^*_1 \ldots Z^*_n)$ adalah titik ekspansi.

Bentuk umum fungsi produksi translog adalah:

$$\ln Y = \ln \alpha_o + \sum \alpha_i \ln X_i + \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta_{ij} \ln X_i \ln X_j$$

Y adalah output dan X_i adalah input. Fungsi produksi translog ini adalah aproksimasi terhadap fungsi arbiter $\ln Y = f(\ln X_i \ldots X_n)$ pada titik ekspansi $x^* = (X^*_1 \ldots X^*_n)$.

Fungsi ini twice-differentiable dalam log input sehingga matriks Hessian-nya simetris. Ini berarti cross-section partial derivatif direstriksi: $\beta_{ij} = \beta_{ji} \ \forall \ i \neq j$.

Selanjutnya fungsi tersebut dapat digolongkan menjadi fungsi yang homogen jika dilakukan restriksi: $\sum_i \beta_{ij} = 0$ atau $\sum_j \beta_{ij} = 0$

dan fungsi tersebut adalah fungsi homogen linier atau constant return to scale jika terbukti bahwa $\sum_i \alpha_i = 1$

Terdapat berbagai jenis fungsi produksi. Fungsi produksi mana yang dipergunakan dalam penelitian bergantung pada asumsi penelitian itu sendiri. Yang penting bagi peneliti adalah mengetahui pengertian dan konsekuensi dari pengggunaan fungsi produksi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Budiono, *Teori Pertumbuhan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 1988.

Chiang, Alpha C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill International Editions. Singapore: McGraw-Hill Book Co, Third Edition, 1984.

Intriligator, Michael D., *Econometric Models, Techniques and Application*, Prentice Hall International, 1978.

Silberberg, Eugene., *The Structure of Economics, A Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1978.

Thomas, R. Leighton., *Introductory Econometrics, Theory and Applications*. Singapore: Longman, 1988.

Varian, Hal R., *Microeconomic Analysis*. London: W.W. Norton & Company, Second Edition, 1984.