DENGAN PENDEKATAN MATRIKS DALAM REGRESI

Chandra Utama
Fakultas Ekonomi Universitas Katolik Parahyangan

Abstract

. Regression is a model that is usually used in many field of study, include economics and business, in a purpose to find causal relation of independent variable to dependent variable. It is described the relation of one or more independent variables to one dependent variable. In many cases, the regression with more than two independent variables is estimated by wrong formula or equation. The fallacy usually exist because statistical or econometrics tax book, which is used as reference, often show only the regression formula for maximum two independent variables. On the other side, it is not much explanation how the formula can be employed to find the coefficient of regression. There are many cases that researchers used formula to calculate coefficient for two independent variables in calculation of more than two independent variables. This paper uses matrix analysis to find formula of regression as well as calculate it by using matrix approach because the development of formula of coefficient in regression can be explained clearly by matrix approach. The different formula and equation must be used in different number of independent variable is concluded by this paper. All variables that used in the model are always calculated in every formula of coefficient.

Key Words: regression coefficient, independent variable, dependent variable

Pendahuluan

Dalam banyak studi, termasuk studi ekonomi dan bisnis, regresi biasa digunakan untuk mengetahui pengaruh satu atau beberapa variabel bebas (*independent variable*) terhadap satu variabel terikat (*dipendent variabel*). Dapat disusun regresi mulai dari satu hingga jumlah tak hingga varibel bebas yang akan diketahui pengaruhnya terhadap satu variabel terikat.

Dalam banyak penelitian, sangat disayangkan terjadi kesalahan dalam menggunakan rumus untuk memperoleh koefisien regresi berganda. Karena dalam buku statistik atau ekonometri selalu maksimal rumus yang disampaikan untuk regresi berganda adalah rumus koefisien β untuk dua variabel bebas maka sering terjadi kesalahan dengan menghitung nilai β dari regresi dengan lebih dari dua variabel bebas menggunakan rumus β tersebut. Kesalahan juga biasa terjadi sekalipun perhitungan koefisien regresi telah benar, karena menggunakan program statistik, namun dalan menampilkan rumus di dalam laporan penelitian menjadi salah karena yang ditampilkan adalah rumus β untuk dua variabel bebas.

Kekeliruan ini sering terjadi karena kurangnya penjelasan, minimal untuk buku statistik bagi ilmu-ilmu sosial, mengapa suatu rumus koefisien regresi satu digunakan dan bukan yang lain. Sehingga terkesan hanya ada dua model rumus yaitu untuk regresi dengan satu variabel bebas atau disebut regresi sederhana dan regresi dengan lebih dari satu variabel bebas atau disebut regresi berganda. Padahal seharusnya tidak demikian, setiap rumus regresi untuk variabel bebas yang berbeda tentu akan berbeda. Rumus koefisien regresi berganda yang disampaikan hanya berlaku untuk regresi dengan dua variabel bebas.

Tulisan ini tidak ditujukan untuk menjelaskan regresi sampai mendalam. Dalam tulisan ini disampaikan menggunakan pendekatan matrik bagaimana rumus koefisien regresi dapat terbentuk. Dengan pendekatan ini akan diketahui bahwa rumus koefisien suatu regresi tentu akan berbeda untuk satu, dua, tiga, dan seterusnya varibel bebas. Untuk menjelaskan kekeliruan tersebut pendekatan matriks dirasa sangat membantu.

Penyusunan regresi menggunakan pendekatan matriks

Bentuk umum suatu regresi linier yang ingin diperoleh dapat dilihat pada persamaan 1 berikut.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_n X_n + \upsilon_1 \qquad (1)$$

Dimana Y adalah varibel terikat dan X adalah varibel bebas yang mempengaruhi Y mulai dari varibel bebas 1 hingga n. β_1 hingga β_n melambangkan besar pengaruh masing-masing varibel bebas terhadap varibel terikatnya. β_0 menunjukkan konstanta persamaan regresi yang menunjukkan nilai Y tanpa pengaruh variabel bebas.

Penjelasan bagaimana suatu rumus koefisien β terbentuk dimulai dengan menampilkan contoh susunan data yang dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1: Contoh data

Observasi	Y	X_1	X_2	....	X_n
1	Y_1	X_{11}	X_{12}		X_{1n}
2	Y_2	X_{21}	X_{22}		X_{2n}
3	Y_3	X_{31}	X_{32}		X_{3n}
....					
M	Y_m	X_{m1}	X_{m2}		X_{mn}

Dimana terdapat m observasi dan n jumlah varibel bebas. X_{21} melambangkan data varibel bebas X_1 pada observasi ke 2. Sedangkan X_{mn} melambangkan data varibel bebas X_n pada observasi ke m. Dari data yang ada dapat disusun sebanyak m persamaan yang dapat diliahat dalam persamaan 2 berikut.

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \dots + \beta_n X_{1n} + \upsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \dots + \beta_n X_{2n} + \upsilon_2 \\
Y_3 &= \beta_0 + \beta_1 X_{31} + \beta_2 X_{32} + \dots + \beta_n X_{3n} + \upsilon_3 \qquad (2) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_m &= \beta_0 + \beta_1 X_{m1} + \beta_2 X_{m2} + \dots + \beta_n X_{mn} + \upsilon_m
\end{aligned}
$$

Jika persamaan 2 tersebut disusun dalam beberapa matriks maka dapat ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{array}{cccccc}
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ \dots \\ Y_m \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & \dots & X_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{m1} & X_{m2} & & X_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \\ \dots \\ \dots \\ \upsilon_m \end{bmatrix} \\
Y & = & X & \beta & + & \upsilon \\
mx1 & & m \times n & mx1 & & mx1
\end{array} \qquad (3)
$$

Dimana :

Y = matriks m × 1 dari m observasi variabel terikat Y

X = matriks m × (n+1) dari m observasi dari n variabel bebas X_1 sampai X_n ditambah kolom pertama yang kesemuanya berisi angka 1 yang menunjukkan intersep dari persamaan.

β = matriks m × 1 dari parameter yang belum diketahui

υ = matriks m × 1 dari residual

Secara ringkas persamaan 3 dapat disusun pada persamaan 4 sebagai berikut.

$$Y = X\beta + \upsilon \qquad (4)$$

karena diasumsikan sebaran data terdistribusi normal maka rata-rata υ adalah nol. Karena nilai υ adalah nol maka persamaan 4 dapat ditulis kembali menjadi persamaan 5 berikut.

$$Y = X\beta \qquad (5)$$

Dari persamaan 5 diatas, karena matrik Y dan X dapat disusun dari data yang ada maka dengan mudah dapat diperoleh nilai matriks β dengan membagi matrik Y dengan matriks X yang ditunjukkan dalam persamaan 6.

$$\beta = Y / X \qquad (6)$$

Pembagian ini dalam operasi matriks dapat ditulis menjadi persamaan 7 dimana dioperasikan dengan mengali matrik Y dengan invers dari matriks X.

$$\beta = X^{-1} Y \qquad (7)$$

Dalam operasi matriks, invers hanya dapat diperoleh dari matriks bujur sangkar. Biasanya dari data yang dihadapi nilai m lebih besar dibanding n sehingga tidak dimungkinkan diperoleh invers dari matriks X. Untuk menghadapi masalah ini maka persamaan 5 diubah menjadi.

$$(X'Y) = (X'X)\beta \qquad (8)$$

Dimana sisi kanan dan kiri persaman 5 dikalikan dengan transpose atau balikan matrik X yang dilambangkan dengan X' sehingga persamaan 7 akan berubah menjadi

$$\beta = (X'X)^{-1}(X'Y) \qquad (9)$$

Dengan mengalikan sisi kanan dan sisi kiri dengan transpose matriks X maka baik matriks $(X'Y)$ menjadi matriks $(n+1)\times 1$ dan matriks $(X'X)$ menjadi matriks $(n+1)\times(n+1)$. Dengan mengalikan sisi kanan dan kiri persamaan dengan sesuatu yang nilainya sama maka perbandingan antara X dan Y tidak berubah. Dengan mengalikan transpose matriks X di kedua sisi maka persamaan 3 tanpa matriks υ seperti yang dijelaskan persamaan 8 akan menjadi berikut.

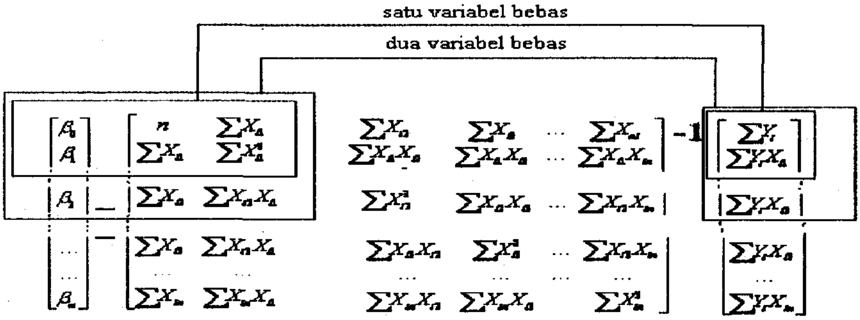
$$\underset{(n+1)\times 1}{\underset{X'Y}{\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{i1} \\ \sum Y_i X_{i2} \\ \sum Y_i X_{i3} \\ \cdots \\ \sum Y_i X_{in} \end{bmatrix}}} \underset{}{\underset{=}{=}} \underset{(n+1)\times(n+1)}{\underset{X'X}{\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \sum X_{i3} & \cdots & \sum X_{ni} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i3} & \cdots & \sum X_{i1}X_{in} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 & \sum X_{i2}X_{i3} & \cdots & \sum X_{i2}X_{in} \\ \sum X_{i3} & \sum X_{i3}X_{i1} & \sum X_{i3}X_{i2} & \sum X_{i3}^2 & \cdots & \sum X_{i3}X_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{in} & \sum X_{in}X_{i1} & \sum X_{in}X_{i2} & \sum X_{in}X_{i3} & & \sum X_{in}^2 \end{bmatrix}}} \underset{(n+1)\times 1}{\underset{\beta}{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}} \qquad (10)$$

Dengan mengali masing masing sisi persamaan maka akan diperoleh matrik bujur sangkar $X'X$ dengan ordo $(n+1)\times(n+1)$ sehingga persamaan nilai β yang sebelumnya tidak dapat diselesaikan menggunakan persamaan 7 bisa diselesaikan menggunakan persamaan 9. Setelah masing-masing koefisien β diperoleh menggunakan persamaan 9 maka regresi pada persamaan 1 dapat disusun. Nilai n pada persamaan 10 adalah jumlah variabel bebas yang ada dalam regresi.

Penentuan rumus koefisien regresi

Untuk memperoleh rumus nilai estimasi β untuk berbagai jumlah variabel bebas, berdasarkan persaman 9, dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan 10 dengan cara yang dapat dilihat pada gambar 1 dibawah.

Gambar 1
Cara memperoleh matriks untuk menyusun rumus koefisien



Pada gambar 1 dapat dilihat bahwa untuk satu variabel bebas matriks $X'X$ dapat diperoleh dengan mengambil 2×2 bujur sangkar terkiri dari matriks umum $X'X$. Begitu juga untuk β dan $(X'Y)$ diperoleh dengan menggunakan 2 kolom teratas. Rumus koefisien regresi dengan dua variabel bebas, matriks $X'X$ dapat diperoleh dengan mengambil 3×3 bujur sangkar terkiri dari matriks umum $X'X$. Begitu juga untuk β dan $(X'Y)$ diperoleh dengan menggunakan 2 kolom teratas.

Berdasarkan gambar 1 diatas maka untuk satu variabel bebas, matriks β dapat diperoleh menggunakan persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1}\\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum Y_i\\ \sum Y_i X_{i1}\end{bmatrix} \qquad (11)$$

Selanjutnya untuk membuat persamaan terlihat kurang rumit, tanda i yang menjelaskan oservasi, dihilangkan dari persamaan. Sehingga persaman 11 setelah diketahui nilai inversnya berubah menjadi persamaan 12 berikut.

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sum X_1^2}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)} & -\dfrac{\sum X_1}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\\ -\dfrac{\sum X_{i1}}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)} & \dfrac{n}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum Y\\ \sum YX_1\end{bmatrix} \qquad (12)$$

Dengan menyederhanakan sisi kanan dari persamaan maka diperoleh

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sum X_1^2\sum Y}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_{i1}\right)\right)} & -\dfrac{\sum X_1\sum YX_1}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\\ -\dfrac{\sum X_{i1}\sum Y_i}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)} & \dfrac{n\sum YX_1}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

Sehingga persamaan 13 dapat dituliskan lagi menjadi

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sum X_1^2\sum Y-\sum X_1\sum YX_1}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\\ \dfrac{-\sum X_1\sum Y+n\sum YX_1}{\left(\left(n\sum X_1^2\right)-\left(\sum X_1\sum X_1\right)\right)}\end{bmatrix} \qquad (14)$$

Dari persamaan 14 diatas akhirnya diperoleh rumus berikut.

$$\beta_0 = \frac{\sum X_1^2 \sum Y - \sum X_1 \sum YX_1}{\left((n\sum X_1^2) - (\sum X_1)^2\right)} \tag{15}$$

dan

$$\beta_1 = \frac{-\sum X_1 \sum Y + n\sum YX_1}{\left((n\sum X_1^2) - (\sum X_1)^2\right)} \tag{16}$$

Terlihat dalam kedua rumus diatas terdapat X_1 dan Y yang diperhitungkan.

Dengan cara yang sama, untuk regresi dengan dua variabel bebas nilai β dapat diperoleh menggunakan rumus sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}X_{i1} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{i1} \\ \sum Y_i X_{i2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Berdasarkan persamaan 17 maka diperoleh matriks β menjadi berikut.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{+\sum Y\left(\sum X_1^2 \sum X_2^2 - (\sum X_1X_2)\right) - \left(\sum YX_1(\sum X_1 \sum X_2^2 - \sum X_2 \sum X_1X_2)\right) + \sum YX_2(\sum X_1 \sum X_1X_2 - \sum X_2 \sum X_1^2)}{n\sum X_1^2 \sum X_2^2 + 2(\sum X_1 \sum X_2 \sum X_1X_2) - ((\sum X_1)^2 \sum X_2^2) - n\sum X_1 \sum X_1X_2 - (\sum X_1)^2 \sum X_2^2} \\ \dfrac{-\sum Y(\sum X_1 \sum X_2^2 - \sum X_2 \sum X_1X_2) + \sum YX_1(n\sum X_2^2 - (\sum X_2)^2) - \sum YX_2(n\sum X_1X_2 - \sum X_1 \sum X_2)}{n\sum X_1^2 \sum X_2^2 + 2(\sum X_1 \sum X_2 \sum X_1X_2) - ((\sum X_1)^2 \sum X_2^2) - n\sum X_1 \sum X_1X_2 - (\sum X_1)^2 \sum X_2^2} \\ \dfrac{+\sum Y(\sum X_1 \sum X_1X_2 - \sum X_2 \sum X_1^2) - \sum YX_1(n\sum X_1X_2 - \sum X_1X_2) + \sum YX_2(n\sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)}{n\sum X_1^2 \sum X_2^2 + 2(\sum X_1 \sum X_2 \sum X_1X_2) - ((\sum X_1)^2 \sum X_2^2) - n\sum X_1 \sum X_1X_2 - (\sum X_1)^2 \sum X_2^2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Terlihat dalam persamaan 18 sifat matrik $X'X$ sangat terlihat. Untuk rumus β_0, β_1 dan β_2 kesemunya memperhitungkan nilai Y, X_1 dan X_2.

Biasanya dalam banyak buku statistik persamaan 18 akan ditulis menjadi berikut.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \beta_2 \bar{X}_2 \\ \dfrac{(\sum yx_1)(\sum x_2^2) - (\sum yx_2)(\sum x_1x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1x_2)^2} \\ \dfrac{(\sum yx_2)(\sum x_1^2) - (\sum yx_1)(\sum x_1x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1x_2)^2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Dimana:

$\bar{Y}$ = rata-rata Y $\qquad x_1 = X_{1i} - \bar{X}_1$

$\bar{X}_1$ = rata-rata X_1 $\qquad x_2 = X_{2i} - \bar{X}_2$

$\bar{X}_2$ = rata-rata X_2 $\qquad y = Y_i - \bar{Y}$

Menggunakan cara yang sama seperti yang telah diuraikan maka dapat diperoleh rumus koefisien β untuk regresi dengan jumlah variabel bebas berapapun. Secara teoritis hal tersebut dapat dilakukan sekalipun dalam praktek akan dihadapi perhitungan matematika yang semakin rumit dengan meningkatnya variabel bebas yang ada.

Kekeliruan dalam menggunakan rumus regresi berganda

Tentu saja nilai koefisien β_1 dan β_2 dalam mempengaruhi Y akan berbeda jika digunakan persamaan 16 untuk Y dan X_1 lalu Y dan X_2. Jika menggunakan persamaan 16 dan bukan 18 maka ketika mencari nilai β_1 maka yang diperhitungkan hanyalah X_1 tanpa X_2 sehingga hasil koefisien β_1 yang diperoleh salah. Begitupun kesalahan yang sama terjadi saat menghitung β_2 tanpa memperhitungkan X_1. Kesalahan ini pun akan terjadi saat β_0 dihitung menggunakan persamaan 15. Kesalahan yang sama juga akan terjadi jika untuk menghitung koefisien β untuk variabel bebas lebih dari dua tetap menggunakan persamaan 18 atau 19. Kekeliruan ini biasa dilakukan karena dalam banyak buku teks statistik hanya disampaikan bahwa untuk regresi berganda rumus β yang digunakan adalah rumus persamaan 18 atau 19 tanpa menjelaskan bahwa rumus tersebut berlaku hanya untuk regresi dengan dua variabel bebas dan tidak lebih. Namun disadari berdasar pembahasan diatas ternyata penggunaan rumus tersebut tidak tepat untuk mencari koefisien β bagi variabel bebas lebih dari 2 variabel terikat.

Jika rumus regresi berganda dua variabel bebas digunakan tentu saat melakukan pengolahan data regresi dengan lebih dari dua variabel bebas terjadi kebingungan untuk setiap perhitungan nilai β variabel yang menjadi X_1 variabel lainya mana yang akan menjadi X_2. Andaikan ada 3 variabel bebas maka terdapat dua kemungkinan variabel lain yang menjadi X_2. Tentu saja kebingungan aka semakin bertambah jika jumlah variabel bebas meningkat.

Lampiran

Pengolahan regresi berganda 3 variabel bebas menggunakan pendekatan matriks

Berikut disampaikan contoh pengolahan data menggunakan matrik untuk membentuk regresi berikut. Digunakan regresi dengan 3 variabel bebas.

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$

Dimana:

Y = Total penjualan plastik

X_1 = GNP

X_2 = jumlah rumahtangga

X_3 = tingkat pengangguran

Berikut disampaikan data untuk persamaan regresi diatas.

Tahun	GNP	Jumlah rumah tangga	Tingkat pengangguran	Total penjualan plastik
1968	1051	1503	3.6	5873
1969	1078	1486	3.5	7852
1970	1075	1434	5	8189
1971	1107	2035	6	7497
1972	1171	2360	5.6	8534
1973	1235	2043	4.9	8688
1974	1217	1331	5.6	7270
1975	1202	1160	8.5	5020
1976	1271	1535	7.7	6035
1977	1332	1961	7	7425
1978	1399	2009	6	9400
1979	1431	1721	6	9350
1980	1480	1298	7.2	6540
1981	1510	1100	7.6	7675
1982	1492	1039	9.2	7419
1983	1535	1200	8.8	7923

Sehingga diperoleh matrik X dan Y sebagai berikut:

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 1051 & 1503 & 3.6 \\ 1 & 1078 & 1486 & 3.5 \\ 1 & 1075 & 1434 & 5.0 \\ 1 & 1107 & 2035 & 6.0 \\ 1 & 1171 & 2360 & 5.6 \\ 1 & 1235 & 2043 & 4.9 \\ 1 & 1217 & 1331 & 5.6 \\ 1 & 1202 & 1160 & 8.5 \\ 1 & 1271 & 1535 & 7.7 \\ 1 & 1332 & 1961 & 7.0 \\ 1 & 1399 & 2009 & 6.0 \\ 1 & 1431 & 1721 & 6.0 \\ 1 & 1480 & 1298 & 7.2 \\ 1 & 1510 & 1100 & 7.6 \\ 1 & 1492 & 1039 & 9.2 \\ 1 & 1535 & 1200 & 8.8 \end{bmatrix} \quad Y=\begin{bmatrix} 5873 \\ 7852 \\ 8189 \\ 7497 \\ 8534 \\ 8688 \\ 7270 \\ 5020 \\ 6035 \\ 7425 \\ 9400 \\ 9350 \\ 6540 \\ 7675 \\ 7419 \\ 7923 \end{bmatrix}$$

Dari matrik X dan Y diatas maka persamaan 9 dapat disusun menjadi $\beta = (X'X)^{-1}(X'Y)$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.0 & 20586 & 25215 & 102 \\ 20586.0 & 26917534 & 32087275 & 134672 \\ 25215.0 & 32087275 & 42139389 & 156283 \\ 102.2 & 134672 & 156283 & 697 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 120690 \\ 155934395 \\ 193831467 \\ 762635 \end{bmatrix}$$

Dan setelah niai $(X'X)^{-1}$ diketahui maka persamaan 9 berubah menjadi persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.20337 & -0.0041539 & -0.0012271 & 0.0215190 \\ -0.00415 & 0.0000049 & 0.0000000 & -0.0003492 \\ -0.00123 & 0.0000000 & 0.0000005 & 0.0000547 \\ 0.02152 & -0.0003492 & 0.0000547 & 0.0534671 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120690 \\ 155934395 \\ 193831467 \\ 762635 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai matriks β menjadi

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 202.050 \\ 6.215 \\ 1.493 \\ -471.056 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat disusun persamaan regresi menjadi

$$Y = 2020{,}50 + 6{,}215X_1 + 1{,}493X_2 - 471{,}056X_3$$

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha C. And Kevin Wainwright, 2005, *Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4th edition,* McGraw Hill.

Draper N. R and H. Smith, 1981, *Applied Regression Analysis, 2nd edition,* John Waley & Sons.

Gujarati, Domador N., (2003), *Basic Econometrics, 4th edition,* McGraw Hill.