NO: III/LPPM/2012-09/100-P

LAPORAN HASIL PENELITIAN

SUATU STUDI: SOLUSI MASALAH NILAI AWAL DENGAN METODE PEMBAGI BEDA

Maria Anestasia

Iwan Sugiarto

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

BANDUNG

2012/2013

ABSTRAK

Persamaan diferensial linear adalah salah satu alat utama yang digunakan untuk aplikasi dalam pemodelan matematika dan analisis di banyak macam sistem dinamik. Oleh karena itu, banyak ditemukan solusi dengan berbagai macam metode. Dalam laporan ini akan diperkenalkan metode baru untuk solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dan sistem persamaan diferensialnya. Metode yang digunakan adalah fungsional pembagi beda. Solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen yang berbentuk sederhana juga dapat dilakukan dengan menggunakan program *Matlab*.

Kata-kata kunci: persamaan diferensial linear, koefisien konstan, fungsional pembagi beda

ABSTRACT

Linear differential equations are one of the main tools for the mathematical modelling and analysis of all kinds of dynamical systems. Therefore, many found the solution with a variety of methods. In this paper, will introduce a new method for the solution of linear differential equations with constant coefficients and system of its differential equations. The solutions are obtained by the application of a divided differences functional. The solution of simple linear differential equation of constant coefficient homogeneous also can be solved by using the *Matlab* program.

Keywords: the linear differential equations, constant coefficients, divided difference function

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang memuat fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial merupakan salah satu alat yang banyak digunakan dalam model matematika dan analisis dalam sistem dinamik. Persamaan diferensial juga merupakan suatu bentuk aplikasi matematika yang digunakan dalam berbagai bidang ilmu, khususnya matematika dan juga banyak memegang peranan penting dalam bidang rekayasa (hukum *Newton*), fisika (rangkaian listrik), matematika biologi (penyebaran penyakit), dan berbagai macam bidang ilmu lain. Persamaan diferensial yang mudah untuk dipelajari adalah dengan koefisien konstan. Secara khusus akan dibahas mengenai persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan baik yang homogen maupun nonhomogen dan sistem dari persamaan diferensial linear koefisien konstan itu sendiri.

Banyak referensi tentang pencarian solusi persamaan diferensial linear dengan berbagai macam metode dengan pengembangannya. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial, diantaranya metode koefisien tak tentu, metode variasi parameter, metode transformasi *Laplace*. Dalam solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan terdapat metode baru yang mulai dikembangkan, yaitu dengan metode fungsional pembagi beda.

Pembagi beda merupakan salah satu metode dalam matematika yang cukup banyak digunakan, seperti pada interpolasi dengan menggunakan koefisien dari polinom yang digunakan, dan perhitungan matematika numerik lainnya. Dalam perkembangannya, fungsional pembagi beda dapat digunakan juga untuk mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan seperti yang akan dibahas dalam laporan ini. Beberapa terminologi tentang fungsional pembagi beda, seperti suku banyak *monic*, *horner* polinomial, fungsional *Taylor*, dan sebagainya perlu diketahui untuk pedoman dalam mempelajari metode ini [1].

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dan nonhomogen menggunakan metode fungsional pembagi beda?

2. Bagaimana mencari solusi sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dan

nonhomogen menggunakan metode fungsional pembagi beda?

3. Bagaimana mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dengan metode fungsional pembagi beda menggunakan program *Matlab*?

1.3 Tujuan Penulisan

1. Menentukan solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dan nonhomogen menggunakan metode fungsional pembagi beda.
2. Menentukan solusi sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dan nonhomogen menggunakan metode fungsional pembagi beda.
3. Menentukan solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dengan metode fungsional pembagi beda menggunakan program *Matlab*.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam makalah ini terbatas pada:

- Persamaan diferensial linear koefisien konstan.
- Fungsi yang berbentuk polinomial dan quasi-polinomial (polinom yang mengandung unsur eksponensial).
- Simulasi untuk mencari solusi persamaan diferensial homogen.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan laporan ini menggunakan sistematika sebagai berikut:

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab 2: Landasan Teori

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial linear dengan menggunakan fungsional pembagi beda.

Bab 3: Solusi Persamaan Diferensial Linear

Bab ini berisi tentang bagaimana cara mencari solusi persamaan diferensial linear yang homogen dan nonhomogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda beserta contoh-contohnya.

Bab 4: Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear

Bab ini berisi tentang bagaimana cara mencari solusi sistem persamaan diferensial linear yang homogen dan nonhomogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda beserta contoh-contohnya.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan laporan ini dan saran untuk pengembangan laporan selanjutnya.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Sebelum membahas mengenai bagaimana mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dan sistemnya dengan metode fungsional pembagi beda, akan dijelaskan secara singkat teori pendukung mengenai persamaan diferensial dan fungsional pembagi beda itu sendiri.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial yang banyak digunakan dalam pemodelan matematika merupakan bentuk persamaan yang memiliki satu variabel atau lebih yang berkaitan dengan turunan-turunannya.

Dalam laporan ini akan dibahas mengenai persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$a_0 g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} g = f(t)$$

Persamaan diferensial linear yang akan dibahas, hanya untuk koefisien konstan. Dengan perkataan lain:
$g,\ g',\ g'',\ldots,\ g^{(n)}$ linear atau berderajat 1 dan $a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n$ merupakan konstanta.

2.2 Fungsional Pembagi Beda

Fungsional pembagi beda berkaitan dengan bentuk polinomial dan yang akan dibahas di sini salah satu dari bagian polinom tersebut, yaitu suku banyak *monic*. Suku banyak *monic* merupakan polinom yang koefisien dari variabel berderajat tertingginya bernilai satu [2].

Diberikan $w(x)$ suku banyak *monic* berderajat $n+1$ yang berbentuk:

$$w(x) = x^{n+1} + b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

Dengan asumsi $x_0,\ x_1,\ldots,\ x_r$ akar-akar dari $w(x)$ dan multiplisitas (kelipatan) akar-akarnya berturut-turut adalah $m_0,\ m_1,\ldots,\ m_r$.

Kita definisikan barisan polinom w_k , untuk $w_0 = 1$, dan

$$w_k(x) = x^k + b_0 x^{k-1} + \cdots + b_k, \qquad k \geq 1$$

di mana b_j adalah koefisien x^{n-j} dari suku banyak *monic* $w(x)$. Lebih lanjut, $w_k(x)$ disebut *Horner polynomials associated* untuk $w(x)$.

Untuk semua polinomial u, pembagi beda $u[x,t]$ didefinisikan sebagai berikut:

$$u[x,t] = \frac{u(x)-u(t)}{x-t} \tag{2.1}$$

$u[x,t]$ adalah polinomial simetri ($u[x,t] = u[t,x]$) dalam x dan t untuk setiap polinomial u. Telah diketahui bahwa identitas polinomial sebagai berikut:

$$x^{k+1} - t^{k+1} = (x-t)\sum_{j=0}^{k} x^j t^{k-j}, \qquad k \geq 0.$$

Dari hasil tersebut diatas dan berdasarkan sifat pembagi beda, maka kita dapatkan:

$$w[x,t] = \sum_{k=0}^{n} w_k(x)t^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} w_k(t)x^{n-k} \tag{2.2}$$

Definisikan pula fungsional Taylor dalam kaitan fungsional pembagi beda dan suku banyak *monic*, sebagai berikut:

$$T_{i,k}g = \frac{1}{k!}g^{(k)}(x_i), \qquad 0 \leq i \leq r, \qquad 0 \leq k \leq m_i - 1 \tag{2.3}$$

untuk semua fungsi g yang terdefinisi dan terdiferensialkan di x_i.

Fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta_w f \quad = \quad \sum_{i=0}^{r} \left\{ \text{residu dari } \frac{f}{w} \text{ di } x_i \right\}$$

di mana residunya merupakan fungsional *Taylor* dari $\frac{f}{w}$ di titik x_i, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta_w f \quad = \quad \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1} \left\{ \frac{f(x)(x-x_i)^{m_i}}{w(x)} \right\} \tag{2.4}$$

Contoh:
Misalkan diberikan suatu fungsi dan suku banyak *monic* sebagai berikut:

$$f(x) = x+1 \text{ dan } w(x) = x^3 - x^2.$$

Akan dicari fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dari fungsi f tersebut.

Perhatikan bahwa dari suku banyak *monic* maka didapatkan akar-akarnya $x_0 = 0$ dan $x_1 = 1$, dengan multiplisitas masing-masing akar $m_0 = 2$ dan $m_1 = 1$. Dengan menggunakan persamaan (2.4) dan (2.3)maka dapat dicari fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta_w f &= \sum_{i=0}^{1} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{(x+1)(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
\Delta_w f &= T_{0,m_0-1}\left\{\frac{(x+1)(x-x_0)^{m_0}}{w(x)}\right\} + T_{1,m_1-1}\left\{\frac{(x+1)(x-x_1)^{m_1}}{w(x)}\right\} \\
\Delta_w f &= T_{0,2-1}\left\{\frac{(x+1)(x-0)^{2}}{w(x)}\right\} + T_{1,1-1}\left\{\frac{(x+1)(x-1)^{1}}{w(x)}\right\} \\
\Delta_w f &= T_{0,1}\left\{\frac{(x+1)x^{2}}{w(x)}\right\} + T_{1,0}\left\{\frac{(x+1)(x-1)}{w(x)}\right\} \\
\Delta_w f &= T_{0,1}\left\{\frac{x+1}{x-1}\right\} + T_{1,0}\left\{\frac{x+1}{x^2}\right\} \\
\Delta_w f &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{(1)}_{x=0} + \left(\frac{x+1}{x^2}\right)_{x=1} \\
\Delta_w f &= \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)_{x=0} + \frac{1+1}{1^2} \\
\Delta_w f &= -2+2 \\
\Delta_w f &= 0
\end{aligned}$$

2.3 Sifat-sifat

Sebelum membahas mengenai solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan fungsional pembagi beda, akan dibahas dahulu sifat-sifat dari fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* agar didapat rumus atau persamaan yang lebih sederhana sehingga mempermudah dalam perbahasan.

2.3.1 Sifat 1

Jika akar-akar dari w sederhana (berkelipatan satu) maka persamaan (2.4) dapat direduksi menjadi:

$$\Delta_w f = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \tag{2.5}$$

di mana n adalah banyaknya akar dari suku banyak *monic* berderajat $n+1$.

Untuk membuktikan persamaan (2.5) diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:
Karena akar-akar dari w sederhana (multiplisitas dari akarnya bernilai satu) maka $m_i = 1$, $r = n$, sehingga didapat:

$$\Delta_w f = \sum_{i=0}^{n} T_{i,0}\left\{\frac{f(x)(x-x_i)}{w(x)}\right\}$$

sehingga dari persamaan di atas cukup dibuktikan bahwa:

$$w'(x_i) = \frac{w(x_i)}{x - x_i}$$

Untuk membuktikan persamaan di atas, misalkan:

$$g(x) = \frac{w(x)}{x - x_i}$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
w(x) &= (x - x_i)g(x) \\
w'(x) &= g(x) + (x - x_i)g'(x) \\
w'(x_i) &= g(x_i) \\
w'(x_i) &= \frac{w(x_i)}{x - x_i}
\end{aligned}$$

Agar dapat lebih dipahami dan dimengerti dilakukan pendekatan dengan contoh berikut ini. Misal diberikan suku banyak *monic* $w(x) = x^3 - x$ dan $f(x) = x + 2$. Akan dicari fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic*.
Tulis yang diketahui sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + 2 \\
w(x) &= x^3 - x \\
w'(x) &= 3x^2 - 1
\end{aligned}$$

Dengan akar-akarnya adalah $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dan multiplisitas dari masing-masing akar adalah $m_0 = m_1 = m_2 = 1$. Dari data-data tersebut maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\Delta_w f &= \sum_{i=0}^{2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} \\
\Delta_w f &= \frac{f(x_0)}{w'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{w'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{w'(x_2)} \\
\Delta_w f &= \frac{x_0 + 2}{3x_0^2 - 1} + \frac{x_1 + 2}{3x_1^2 - 1} + \frac{x_2 + 2}{3x_2^2 - 1} \\
\Delta_w f &= \frac{0 + 2}{3.0^2 - 1} + \frac{-1 + 2}{3(-1)^2 - 1} + \frac{1 + 2}{3.1^2 - 1} \\
\Delta_w f &= \frac{2}{-1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\
\Delta_w f &= 0
\end{aligned}$$

2.3.2 Sifat 2

Misal jika diberikan u dan v suku banyak *monic*, maka fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dapat ditulis:

$$\Delta_{uv}\{vf\} = \Delta_u f \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dapat dibuktikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta_{uv}\{vf\} &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{vf(x)(x-x_i)^{m_i}}{uv(x)}\right\} \\
\Delta_{uv}\{vf\} &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{f(x)(x-x_i)^{m_i}}{u(x)}\right\} \\
\Delta_{uv}\{vf\} &= \Delta_u f
\end{aligned}$$

Contoh: Misalkan diberikan suku banyak *monic* dan suatu fungsi sebagai berikut:

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \text{ dan } 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

Dengan menggunakan persamaan (2.6) maka fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dari data di atas dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta_{x^3+2x^2+x+2}\{2x^3 - 3x^2 + 2x - 3\} &= \Delta_{(x^2+1)(x+2)}\{(x^2+1)(2x-3)\} \\
\Delta_{x^3+2x^2+x+2}\{2x^3 - 3x^2 + 2x - 3\} &= \Delta_{x+2}\{(2x-3)\}
\end{aligned}$$

2.3.3 Sifat 3

Misal u dan v suku banyak monic, a dan b bilangan kompleks, jika

$$\frac{p(x)}{w(x)} = \frac{a}{u(x)} + \frac{b}{v(x)}$$

Maka fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta_w\{pf\} = a\Delta_u f + b\Delta_v f \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\Delta_w\{pf\} &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\frac{pf(x)(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right] \\
\Delta_w\{pf\} &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\left(\frac{a}{u(x)} + \frac{b}{v(x)}\right) f(x)(x-x_i)^{m_i}\right] \\
\Delta_w\{pf\} &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\frac{af(x)(x-x_i)^{m_i}}{u(x)}\right] + \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\frac{bf(x)(x-x_i)^{m_i}}{v(x)}\right] \\
\Delta_w\{pf\} &= a\sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\frac{f(x)(x-x_i)^{m_i}}{u(x)}\right] + b\sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left[\frac{f(x)(x-x_i)^{m_i}}{v(x)}\right] \\
\Delta_w\{pf\} &= a\Delta_u f + b\Delta_v f
\end{aligned}$$

Contoh: Misalkan diberikan suatu polinom dan suku banyak *monic* sebagai berikut:

$$2x + 1 \text{ dan } x^2 + 3x + 2$$

Perhatikan bahwa:

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.7) maka fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* dari data di atas dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta_{x^2+3x+2}\{4x^2+2x\} &= \Delta_{x^2+3x+2}\{2x(2x+1)\} \\
\Delta_{x^2+3x+2}\{4x^2+2x\} &= 3\Delta_{x+2}\{2x\} - 1\Delta_{x+1}\{2x\}
\end{aligned}$$

BAB 3

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

Sebelumnya telah dibahas mengenai definisi dari persamaan diferensial linear koefisien konstan dan sifat-sifat dari fungsional pembagi beda, lalu dalam bab ini akan dibahas mengenai solusi dari persamaan diferensial linear koesfisien konstan yang berbentuk homogen dan nonhomogen dengan menggunakan metode fungsional pembagi beda.

3.1 Solusi Persamaan Diferensial Linear Homogen

Persamaan diferensial linear homogen adalah persamaan diferensial yang memiliki bentuk sebagai berikut:

$$g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} g = 0$$

Kemudian persamaan diferensial linear homogen tersebut dapat disederhanakan menjadi bentuk:

$$w(D)g(t) = 0$$

Dengan w polinomial *monic*, t peubah real atau kompleks, dan D merupakan operator diferensial.

Dengan menggunakan fungsional pembagi beda yang berkaitan dengan suku banyak *monic* maka fungsi g yang memenuhi persamaan diferensial di atas adalah :

$$g(t) = \Delta_{w(x)}\{p(x)e^{xt}\} \tag{3.1}$$

untuk setiap polinom p.

Dengan menggunakan persamaan (3.1), dapat dibuktikan bahwa $g(t)$ merupakan solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w(D)g(t) &= w(D_t)\Delta_{w(x)}\{p(x)e^{xt}\} \\
w(D)g(t) &= w(D_t)\sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
w(D)g(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{w(D_t)p(x)e^{xt}(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w(D)g(t) &= \Delta_{w(x)} w(D_t)\{p(x)e^{xt}\} \\
w(D)g(t) &= \Delta_{w(x)}\{w(x)p(x)e^{xt}\} \\
w(D)g(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{w(x)p(x)e^{xt}(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
w(D)g(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\{p(x)e^{xt}(x-x_i)^{m_i}\} \\
w(D)g(t) &= 0 \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Jadi

$$g(t) = \Delta_{w(x)}\{p(x)e^{xt}\}$$

merupakan bentuk solusi dari persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen.

3.1.1 Contoh

Untuk memudahkan dalam pemahaman mengenai solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda maka dberikan contoh seperti berikut di bawah ini.

Misalkan diberikan persamaan diferensial linear homogen sebagai berikut:

$$g''' - g'' = 0$$

Persamaan diferensial di atas dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$(D^3 - D^2)g = 0$$

Dari bentuk persamaan diferensial linear homogen di atas maka dapat diketahui suku banyak *monic* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
w(x) &= x^3 - x^2 \\
w'(x) &= 3x^2 - 2x
\end{aligned}
$$

Dengan akar-akarnya $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ dan multiplisitas dari akar-akarnya $m_0 = 2,\ m_1 = 1$. Dari hasil tersebut maka dapat dicari solusi persamaan diferensial linear homogen di atas dengan menggunakan rumus (3.1) dengan langkah-langkah seperti berikut ini.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \Delta_{w(x)}\{p(x)e^{xt}\} \\
g(t) &= \sum_{i=0}^{1} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x-x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
g(t) &= T_{0,m_0-1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x-x_0)^{m_0}}{w(x)}\right\} + T_{1,m_1-1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x-x_1)^{m_1}}{w(x)}\right\} \\
g(t) &= T_{0,1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x)^2}{x^3-x^2}\right\} + T_{1,0}\left\{\frac{p(x)e^{xt}(x-1)^1}{x^3-x^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= T_{0,1}\left\{\frac{p(x)e^{xt}}{x-1}\right\} + T_{1,0}\left\{\frac{p(x)e^{xt}}{x^2}\right\} \\
g(t) &= \left[\left\{\frac{p(x)e^{xt}}{x-1}\right\}^{(1)}\right]_{x_0} + \left[\left\{\frac{p(x)e^{xt}}{x^2}\right\}^{(0)}\right]_{x_1} \\
g(t) &= \left[\frac{[p'(x)e^{xt}+p(x)te^{xt}](x-1)+p(x)e^{xt}}{(x-1)^2}\right]_0 + \left[\frac{p(x)e^{xt}}{x^2}\right]_1 \\
g(t) &= \frac{[p'(0)e^{0.t}+p(0)te^{0.t}](0-1)+p(0)e^{0.t}}{(0-1)^2} + \frac{p(1)e^{1.t}}{1^2} \\
g(t) &= \frac{[p'(0)+p(0)t](-1)+p(0)}{1} + \frac{p(1)e^t}{1} \\
g(t) &= [p'(0)+p(0)t](-1)+p(0)+p(1)e^t \\
g(t) &= p(0)+p(1)e^t - p'(0) - p(0)t
\end{aligned}
$$

Jadi, didapat hasil solusi untuk $g''' - g'' = 0$ dengan menggunakan fungsional pembagi beda adalah $g(t) = p(0) + p(1)e^t - p'(0) - p(0)t$, untuk setiap polinom p.

Dalam subbab ini diberikan juga simulasi dengan menggunakan program *Matlab* untuk mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan metode fungsional pembagi beda. Simulasi yang dilakukan hanya terbatas pada bentuk persamaan diferensial yang masih sederhana, yaitu suku banyak *monic* yang memiliki akar tunggal atau masing-masing akar memiliki multiplisitas satu. Untuk persamaan diferensial yang lebih kompleks, penulis cukup sulit mencari solusinya dengan menggunakan program *Matlab* sehingga tidak dilampirkan dalam laporan ini. Untuk kode program Matlabnya sendiri dapat dilihat di (A).

3.2 Solusi Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai bagaimana cara mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen, namun sebelumnya akan dibahas dahulu konvolusi dua buah fungsi sebagai kaitan dalam mencari solusi persamaan diferensial tersebut.

Definisikan konvolusi $f * h$, sebagai berikut:

$$(f * h)(t) = \int_0^t f(t-y)h(y)dy, \qquad t \geq 0 \tag{3.3}$$

Aturan *Liebniz* diberikan sebagai berikut:

$$D_t \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,y)dy = \int_{a(t)}^{b(t)} D_t f(t,y)dy + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

Dari aturan *Liebniz* di atas, maka turunan untuk konvolusi didapat dengan langkah-langkah sebagai berikut ini.

$$\begin{aligned}
D_t(f*h)(t) &= D_t(h*f)(t) \\
D_t(f*h)(t) &= D_t\int_0^t h(t-y)f(y)dy \\
D_t(f*h)(t) &= \int_0^t D_t[h(t-y)f(y)]dy + h(0)f(t) - h(t)f(0).0 \\
D_t(f*h)(t) &= \int_0^t [D_t h(t-y)]f(y)dy + f(t)h(0) \\
D_t(f*h)(t) &= D_t h(t) * f(t) + f(t)h(0) \\
D_t(f*h)(t) &= f(t) * D_t h(t) + f(t)h(0) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen, persamaan diferensial nonhomogen adalah persamaan diferensial yang menghasilkan suatu fungsi, dengan bentuk umum persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen sebagai berikut:

$$w(D)g(t) = f(t) \qquad (3.5)$$

Dengan w polinomial *monic*, t peubah real atau kompleks, g polinomial, dan D merupakan operator diferensial, f *quasi*-polinomial.
Fungsi g yang memenuhi persamaan diferensial di atas adalah:

$$g(t) = \Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\} \qquad (3.6)$$

Dari persamaan (3.6) dapat dibuktikan bahwa persamaan (3.5) benar, menggunakan induksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:
Jika $n = 0$ maka $w(x) = x - a$ berderajat satu, di mana $m_0 = 1$, $x_0 = a$

$$\begin{aligned}
w(D)g(t) &= (D - aI)g(t) \\
w(D)g(t) &= (D_t - aI)\Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\} \\
w(D)g(t) &= D_t[\Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\}] - a[\Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\}] \\
w(D)g(t) &= D_t\left[T_{0,0}\frac{\int_0^t f(t-y)e^{xy}dy(x-a)}{x-a}\right] - a\left[T_{0,0}\frac{\int_0^t f(t-y)e^{xy}dy(x-a)}{x-a}\right] \\
w(D)g(t) &= D_t\left[\int_0^t f(t-y)T_{0,0}\frac{e^{xy}(x-a)}{x-a}dy\right] - a\left[\int_0^t f(t-y)T_{0,0}\frac{e^{xy}(x-a)}{x-a}dy\right] \\
w(D)g(t) &= D_t[f(t) * \Delta_{w(x)}e^{xt}] - a[f(t) * \Delta_{w(x)}e^{xt}] \\
w(D)g(t) &= D_t[f(t) * e^{at}] - a[f(t) * e^{at}] \\
w(D)g(t) &= f(t) * ae^{at} + f(t) - f(t) * ae^{at} \\
w(D)g(t) &= f(t)
\end{aligned}$$

Misal benar untuk $w(x)$ berderajat k, sehingga

$$w(D)g(t) = f(t)$$

Selanjutnya akan dibuktikan benar bahwa untuk $w(x)$ berderajat $k+1$. Ini ekuivalen dengan menunjukkan

$$p(D)g(t) = f(t)$$

dengan

$$p(x) = (x-a)w(x)$$

dan $w(x)$ berderajat k.
Kemudian dengan menggunakan persamaan (3.6), maka didapat:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \Delta_{p(x)}\{f(t) * e^{xt}\} \\
g(t) &= \sum_{0}^{r} T_{i,m_i-1} \frac{\int_0^t f(t-y)e^{xy}dy(x-x_i)^{m_i}}{p(x)} \\
g(t) &= \int_0^t f(t-y)\sum_{0}^{r} T_{i,m_i-1}\frac{e^{xy}(x-x_i)^{m_i}}{p(x)}dy \\
g(t) &= f(t) * \Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi dan hasil di atas maka $g(t)$ dapat disubtitusikan menjadi seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned}
(D-aI)g(t) &= Dg(t) - ag(t) \\
(D-aI)g(t) &= D_t[f(t) * \Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}] - a[f(t) * \Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}] \\
(D-aI)g(t) &= f(t) * D[\Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}] + f(t)\Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}|_{t=0} - a[f(t) * \Delta_{p(x)}\{e^{xt}\}] \\
(D-aI)g(t) &= f(t) * \Delta_{p(x)}\{xe^{xt}\} + f(t).0 - f(t) * \Delta_{p(x)}\{ae^{xt}\} \\
(D-aI)g(t) &= f(t) * \Delta_{p(x)}\{(x-a)e^{xt}\} \\
(D-aI)g(t) &= f(t) * \Delta_{(x-a)w(x)}\{(x-a)e^{xt}\} \\
(D-aI)g(t) &= f(t) * \Delta_{w(x)}\{e^{xt}\}
\end{aligned}$$

Persamaan diferensial linear nonhomogen dapat ditulis seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
p(D)g(t) &= w(D)(D-aI)g(t) \\
p(D)g(t) &= w(D)[f(t) * \Delta_{w(x)}\{e^{xt}\}] \\
p(D)g(t) &= f(t)
\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $g(t) = \Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\}$ merupakan bentuk solusi dari persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen.

3.2.1 Contoh

Untuk memudahkan dalam pemahaman mengenai solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda maka dberikan contoh.

Misal diberikan persamaan diferensial linear nonhomogen sebagai berikut:

$$g'' + g' - 2g = e^{3t}$$

Persamaan diferensial di atas dapat ditulis menjadi seperti di bawah ini:

$$g'' + g' - 2g = (D^2 + D - 2)g$$

Dari data persamaan diferensial di atas dapat diketahui suku banyak monic seperti berikut:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^2 + x - 2 \\ w'(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Dengan akar-akarnya $x_0 = -2,\ x_1 = 1$ dan multiplisitas dari akar-akarnya $m_0 = m_1 = 1$. Untuk mempermudah perhitungan, selanjutnya akan cari konvolusi dari:

$$\begin{aligned} e^{3t} * e^{xt} &= \int_0^t e^{3(t-y)} e^{xy} dy \\ e^{3t} * e^{xt} &= e^{3t} \int_0^t e^{(x-3)y} dy \\ e^{3t} * e^{xt} &= e^{3t} \left[\frac{e^{(x-3)t} - 1}{x - 3} \right] \\ e^{3t} * e^{xt} &= \frac{e^{xt} - e^{3t}}{x - 3} \end{aligned}$$

Maka fungsi $g(t)$ yang memenuhi persamaan diferensial linear koefisien konstan di atas dengan menggunakan persamaan (3.6) adalah:

$$\begin{aligned} g(t) &= \Delta_{w(x)}\{f(t) * e^{xt}\} \\ g(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{3t} * e^{xt}\} \\ g(t) &= \Delta_{w(x)} \left\{ \frac{e^{xt} - e^{3t}}{x - 3} \right\} \\ g(t) &= \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{x_i t} - e^{3t}}{(x_i - 3) w'(x_i)} \\ g(t) &= \frac{e^{x_0 t} - e^{3t}}{(x_0 - 3) w'(x_0)} + \frac{e^{x_1 t} - e^{3t}}{(x_1 - 3) w'(x_1)} \\ g(t) &= \frac{e^{(-2)t} - e^{3t}}{(-2 - 3) w'(-2)} + \frac{e^{1.t} - e^{3t}}{(1 - 3) w'(1)} \\ g(t) &= \frac{e^{(-2)t} - e^{3t}}{(-5)(2.(-2) + 1)} + \frac{e^{1.t} - e^{3t}}{(-2)(2.1 + 1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{e^{(-2)t} - e^{3t}}{15} + \frac{e^{t} - e^{3t}}{-6} \\
g(t) &= \frac{-2e^{(-2)t} + 2e^{3t} + 5e^{t} - 5e^{3t}}{-30} \\
g(t) &= \frac{-2e^{(-2)t} + 5e^{t} - 3e^{3t}}{-30} \\
g(t) &= \frac{1}{10}e^{3t} + \frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{t}
\end{aligned}
$$

Jadi, solusi untuk persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen $g'' + g' - 2g = e^{3t}$ adalah $g(t) = \frac{1}{10}e^{3t} + \frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{t}$.

BAB 4

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai bagaimana mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dan nonhomogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda. Selanjutnya dalam bab ini akan dibahas mengenai solusi dari sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan metode fungsional pembagi beda. Sistem persamaan diferensial linear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan diferensial yang saling berhubungan satu dan lainnya. Sistem persamaan diferensial linear yang akan dibahas secara umum, yaitu sebanyak $n + 1$ persamaan.

4.1 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Homogen

Sistem persamaan diferensial linear homogen memiliki bentuk umum sebagai berikut ini.

$$\begin{aligned}
g_1'(t) &= a_{11}g_1(t) + a_{12}g_2(t) + \ldots + a_{1(n+1)}g_{n+1}(t) \\
g_2'(t) &= a_{21}g_1(t) + a_{22}g_2(t) + \ldots + a_{2(n+1)}g_{n+1}(t) \\
&\vdots \\
g_{n+1}'(t) &= a_{(n+1)1}g_1(t) + a_{(n+1)2}g_2(t) + \ldots + a_{(n+1)(n+1)}g_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

Sistem persamaan diferensial linear homogen di atas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, sebagai berikut:

$$M'(t) = AM(t) \text{ dan } M(0) = C$$

dengan:

$$M'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_{n+1}'(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix}, \text{ dan } M(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini A merupakan matriks persegi yang berbentuk konstanta dan $M(t)$ merupakan matriks fungsi terhadap t.

Teorema [3]:
Misal A matriks persegi konstanta dan w suku banyak *monic*, sehingga $w(A) = 0$, lalu didefinisikan matriks $M(t)$ sebagai berikut:

$$M(t) = \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w[x, A]\}C \tag{4.1}$$

Maka didapat sistem persamaan diferensial linear homogen seperti berikut $M'(t) = AM(t)$ dan $M(0) = C$.

Dari persamaan (4.1) dapat dibuktikan bahwa $M'(t) = AM(t)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut ini.
Ambil $w(x)$ dan $w_k(x)$ *Horner polinomial* dari $w(x)$. Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2) maka didapatkan:

$$(xI - A)w[x, A] = w(x)I - w(A)$$

dan

$$w[x, A] = \sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(x)A^k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Selanjutnya ambil operator diferensial D terhadap t maka dengan menggunakan persamaan (4.1), sistem persamaan diferensial linear homogen dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
M'(t) - AM(t) &= (D - A)M(t) \\
M'(t) - AM(t) &= (D_t - A)\Delta_{w(x)}\{e^{xt}w[x, A]\}C \\
M'(t) - AM(t) &= (D_t - A)\sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{e^{xt}w[x, A](x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{(D_t - A)e^{xt}w[x, A](x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{e^{xt}(xI - A)w[x, A](x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}(xI - A)w[x, A]\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}(w(x)I - w(A))\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}(w(x) - 0)\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w(x)\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{e^{xt}w(x)(x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\}C \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\{e^{xt}(x - x_i)^{m_i}\}C \\
M'(t) - AM(t) &= 0
\end{aligned}$$

Dari teorema di atas dapat disimpulkan bahwa solusi untuk sistem persamaan diferensial linear homogen di atas, adalah:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w[x,A]\}C \\
M(t) &= \Delta_{w(x)}\left\{e^{xt}\sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(x)A^k\right\}C \\
M(t) &= \sum_{k=0}^{n} \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w_{n-k}(x)\}A^kC
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Sifat:
Berdasarkan persamaan (4.1) dan $M(0) = C$ maka didapatkan:

$$\Delta_{w(x)}\{e^{xt}w[x,A]\} = I \tag{4.3}$$

Bukti:
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w[x,A]\}C \\
M(0) &= \Delta_{w(x)}\{e^{x.0}w[x,A]\}C \\
C &= \Delta_{w(x)}\{w[x,A]\}C \\
CC^{-1} &= \Delta_{w(x)}\{w[x,A]\}CC^{-1} \\
I &= \Delta_{w(x)}\{w[x,A]\}
\end{aligned}$$

4.1.1 Contoh

Untuk memudahkan dalam pemahaman mengenai solusi sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda maka dberikan contoh berikut ini.

Misal diberikan sistem persamaan diferensial linear homogen, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g_1'(t) &= 2g_1(t) - g_2(t) \\
g_2'(t) &= g_2(t)
\end{aligned}$$

Akan dicari solusi umum untuk $g_1(t)$ dan $g_2(t)$.
Langkah pertama untuk mencari solusi sistem persamaan diferensial linear homogen di atas adalah dengan mensubtitusikan salah satu persamaan, perhatikan persamaan diferensial linear homogen berikut ini.

$$g_1'(t) = 2g_1(t) - g_2(t)$$

Dari persamaan diferensial linear homogen di atas, dengan menurunkannya satu kali terhadap t maka didapat:

$$\begin{aligned}
g_1''(t) &= 2g_1'(t) - g_2'(t) \\
g_1''(t) &= 2g_1'(t) - g_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1''(t) &= 2g_1'(t) + g_1'(t) - 2g_1(t) \\ g_1''(t) &= 3g_1'(t) - 2g_1(t) \\ g_1''(t) - 3g_1'(t) + 2g_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dari hasil tersebut di atas maka dapat diketahui suku banyak *monic* $w(x) = x^2 - 3x + 2$, dengan akar-akar $x_0 = 2$ dan $x_1 = 1$, multiplisitas dari masing-masing akar bernilai satu. Selanjutnya ubah sistem persamaan diferensial tersebut ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} M'(t) &= AM(t) \\ \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.1), maka dapat dicari solusi umum sistem persamaan diferensialnya, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{k=0}^{1} \Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_{1-k}(x)\} A^k C \\ M(t) &= [\Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_1(x)\} A^0 + \Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_0(x)\} A^1] C \\ M(t) &= \left[\sum_{i=0}^{1} \frac{e^{x_i t} w_1(x_i)}{w'(x_i)} I + \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{x_i t} w_0(x_i)}{w'(x_i)} A \right] C \\ M(t) &= \left[\left(\frac{e^{x_0 t} w_1(x_0)}{w'(x_0)} + \frac{e^{x_1 t} w_1(x_1)}{w'(x_1)} \right) I + \left(\frac{e^{x_0 t} w_0(x_0)}{w'(x_0)} + \frac{e^{x_1 t} w_0(x_1)}{w'(x_1)} \right) A \right] C \\ M(t) &= \left[\left(\frac{e^{x_0 t}(x_0 - 3)}{2x_0 - 3} + \frac{e^{x_1 t}(x_1 - 3)}{2x_1 - 3} \right) I + \left(\frac{e^{x_0 t}}{2x_0 - 3} + \frac{e^{x_1 t}}{2x_1 - 3} \right) A \right] C \\ M(t) &= \left[(-e^{2t} + 2e^t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^{2t} - e^t) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] C \\ M(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa solusi umum untuk sistem persamaan diferensial di atas adalah:

$$M(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2(e^t - e^{2t}) \\ C_2 e^t \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan diferensial linear homogen di atas dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan menjadi persamaan diferensial linear koefisien konstan orde dua sebagai berikut:

$$g_1''(t) - 3g_1'(t) + 2g_1(t) = 0$$

Dari persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen di atas diketahui suku banyak *monic*, akar-akar, dan multiplisitasnya sebagai berikut :

$w(x) = x^2 - 3x + 2$ $w'(x) = 2x - 3$	$x_0 = 2$ $x_1 = 1$	$m_0 = 1$ $m_1 = 1$

Dari data di atas maka dapat dicari solusi untuk $g_1(t)$ dengan menggunakan persamaan (3.1) adalah:

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \Delta_{w(x)}\{p(x)e^{xt}\} \\
g_1(t) &= \sum_{i=0}^{1} \frac{p(x_i)e^{x_i t}}{w'(x_i)} \\
g_1(t) &= \frac{p(x_0)e^{x_0 t}}{2x_0 - 3} + \frac{p(x_1)e^{x_1 t}}{2x_1 - 3} \\
g_1(t) &= \frac{p(2)e^{2t}}{2.2 - 3} + \frac{p(1)e^{t}}{2.1 - 3} \\
g_1(t) &= p(2)e^{2t} - p(1)e^{t}
\end{aligned}$$

Lalu turunkan satu kali $g_1(t)$, sehingga didapat $g_1'(t)$ sebagai berikut:

$$g_1'(t) = 2p(2)e^{2t} - p(1)e^{t}$$

Kemudian subtitusikan $g_1'(t)$ dan $g_1(t)$ pada persamaan $g_2(t)$ sehingga diperoleh solusi untuk $g_2(t)$ adalah:

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= 2g_1(t) - g_1'(t) \\
g_2(t) &= 2[p(2)e^{2t} - p(1)e^{t}] - [2p(2)e^{2t} - p(1)e^{t}] \\
g_2(t) &= 2p(2)e^{2t} - 2p(1)e^{t} - 2p(2)e^{2t} + p(1)e^{t} \\
g_2(t) &= -p(1)e^{t}
\end{aligned}$$

4.2 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen

Sistem persamaan diferensial linear nonhomogen yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g_1'(t) &= a_{11}g_1(t) + a_{12}g_2(t) + \ldots + a_{1(n+1)}g_{n+1}(t) + u_1(t) \\
g_2'(t) &= a_{21}g_1(t) + a_{22}g_2(t) + \ldots + a_{2(n+1)}g_{n+1}(t) + u_2(t) \\
&\vdots \\
g_{n+1}'(t) &= a_{(n+1)1}g_1(t) + a_{(n+1)2}g_2(t) + \ldots + a_{(n+1)(n+1)}g_{n+1}(t) + u_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

Sistem persamaan diferensial linear nonhomogen di atas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, sebagai berikut:

$$M'(t) = AM(t) + U(t)$$

dengan:

$$M'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_{n+1}'(t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix},$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{n+1}(t) \end{pmatrix}, \text{ dan } U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini A merupakan matriks persegi yang berbentuk konstanta, $M(t)$ merupakan matriks fungsi terhadap t, dan $U(t)$ merupakan solusi partikular, matriks fungsi terhadap t berupa kuasi-polinomial.

Teorema [3]:
Misal A matriks persegi konstanta dan w suku banyak *monic*, sehingga w(A)=0, lalu didefinisikan matriks $M(t)$ sebagai berikut:

$$M(t) = \Delta_{w(x)}\{w[x,A]e^{xt} * U(t)\} \tag{4.4}$$

Maka didapat sistem persamaan diferensial linear homogen seperti berikut $M'(t) = AM(t) + U(t)$.

Dari persamaan (4.4) dapat dibuktikan bahwa $M'(t) = AM(t) + U(t)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut ini.
Ambil $w(x)$ dan $w_k(x)$ *Horner polinomial* dari $w(x)$. Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2) maka didapatkan:

$$(xI - A)w[x,A] = w(x)I - w(A)$$

dan

$$w[x,A] = \sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(x)A^k, \quad 0 \le k \le n$$

Selanjutnya ambil D operator diferensial terhadap t maka dengan menggunakan persamaan (4.4) dan sifat dari persamaan (4.3), sistem persamaan diferensial linear nonhomogen dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
M'(t) - AM(t) &= (D - A)M(t) \\
M'(t) - AM(t) &= (D - A)\Delta_{w(x)}\{w[x,A]e^{xt} * U(t)\} \\
M'(t) - AM(t) &= (D - A)\sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{w[x,A]e^{xt} * U(t)(x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{(D - A)w[x,A]e^{xt} * U(t)(x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
M'(t) - AM(t) &= \sum_{i=0}^{r} T_{i,m_i-1}\left\{\frac{[(xI - A)w[x,A](e^{xt} * U(t)) + w[x,A]U(t)](x - x_i)^{m_i}}{w(x)}\right\} \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{(xI - A)w[x,A](e^{xt} * U(t)) + w[x,A]U(t)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{(w(x)I - w(A))(e^{xt} * U(t)) + w[x,A]U(t)\} \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{(w(x) - 0)(e^{xt} * U(t)) + w[x,A]U(t)\} \\
M'(t) - AM(t) &= \Delta_{w(x)}\{w(x)(e^{xt} * U(t))\} + \Delta_{w(x)}\{w[x,A]U(t)\} \\
M'(t) - AM(t) &= 0 + \Delta_{w(x)}\{w[x,A]\}U(t) \\
M'(t) - AM(t) &= IU(t) \\
M'(t) - AM(t) &= U(t)
\end{aligned}$$

Dari teorema di atas dapat disimpulkan bahwa solusi untuk sistem persamaan diferensial linear nonhomogen di atas, adalah:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \Delta_{w(x)}\{w[x,A]e^{xt} * U(t)\} \\
M(t) &= \Delta_{w(x)}\left\{e^{xt}\sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(x)A^k * U(t)\right\} \\
M(t) &= \sum_{k=0}^{n} \Delta_{w(x)}\{e^{xt}w_{n-k}(x)\}A^k * U(t) \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

4.2.1 Contoh

Untuk memudahkan dalam pemahaman mengenai solusi sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen dengan menggunakan fungsional pembagi beda maka dberikan contoh.

Misal diberikan sistem persamaan diferensial, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g_1'(t) &= 2g_1(t) + g_2(t) + e^{2t} \\
g_2'(t) &= g_1(t) + 2g_2(t) - e^{2t}
\end{aligned}$$

Akan dicari solusi untuk $g_1(t)$ dan $g_2(t)$.
Langkah pertama untuk mencari solusi sistem persamaan diferensial linear nonhomogen di atas adalah dengan mensubtitusikan salah satu persamaan, perhatikan persamaan diferensial linear nonhomogen berikut ini.

$$g_1'(t) = 2g_1(t) + g_2(t) + e^{2t}$$

Dari persamaan diferensial linear nonhomogen di atas, dengan menurunkannya satu kali terhadap t maka didapat:

$$\begin{aligned}
g_1''(t) &= 2g_1'(t) + g_2'(t) + 2e^{2t} \\
g_1''(t) &= 2g_1'(t) + g_1(t) + 2g_2(t) - e^{2t} + 2e^{2t} \\
g_1''(t) &= 2g_1'(t) + g_1(t) + 2(g_1'(t) - 2g_1(t) - e^{2t}) + e^{2t} \\
g_1''(t) &= 2g_1'(t) + g_1(t) + 2g_1'(t) - 4g_1(t) - 2e^{2t}) + e^{2t} \\
g_1''(t) &= 4g_1'(t) - 3g_1(t) - 2e^{2t}) + e^{2t} \\
g_1''(t) - 4g_1'(t) + 3g_1(t) &= -e^{2t}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diferensial di atas maka didapat suku banyak *monic* $w(x) = x^2 - 4x + 3$, dengan akar-akar $x_0 = 3$ dan $x_1 = 1$, dan multiplisitas dari masing-masing akar bernilai satu.
Selanjutnya ubah sistem persamaan diferensial linear nonhomogen tersebut ke dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} M'(t) &= AM(t) + U(t) \\ \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.5), maka dapat dicari solusi sistem persamaan diferensial linear nonhomogen tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{k=0}^{1} \Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_{1-k}(x)\} A^k * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= [\Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_1(x)\} A^0 + \Delta_{w(x)}\{e^{xt} w_0(x)\} A^1] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\sum_{i=0}^{1} \frac{e^{x_i t} w_1(x_i)}{w'(x_i)} I + \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{x_i t} w_0(x_i)}{w'(x_i)} A \right] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{e^{x_0 t} w_1(x_0)}{w'(x_0)} + \frac{e^{x_1 t} w_1(x_1)}{w'(x_1)} \right) I + \left(\frac{e^{x_0 t} w_0(x_0)}{w'(x_0)} + \frac{e^{x_1 t} w_0(x_1)}{w'(x_1)} \right) A \right] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{e^{x_0 t}(x_0 - 4)}{2x_0 - 4} + \frac{e^{x_1 t}(x_1 - 4)}{2x_1 - 4} \right) I + \left(\frac{e^{x_0 t}}{2x_0 - 4} + \frac{e^{x_1 t}}{2x_1 - 4} \right) A \right] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{e^{3t}(3 - 4)}{2.3 - 4} + \frac{e^{t}(1 - 4)}{2.1 - 4} \right) I + \left(\frac{e^{3t}}{2.3 - 4} + \frac{e^{t}}{2.1 - 4} \right) A \right] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\left(-\frac{1}{2} e^{3t} + \frac{3}{2} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] * U(t) \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{3t} + \frac{3}{2} e^t & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} e^{3t} + \frac{3}{2} e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} - e^t & \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t \\ \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t & e^{3t} - e^t \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{1}{2} e^t & \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t \\ \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t & \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{1}{2} e^t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3y} + e^y & e^{3y} - e^y \\ e^{3y} - e^y & e^{3y} + e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2(t-y)} \\ -e^{2(t-y)} \end{pmatrix} dy \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} (e^{3y} + e^y) e^{2(t-y)} - (e^{3y} - e^y) - e^{2(t-y)} \\ (e^{3y} - e^y) e^{2(t-y)} - (e^{3y} + e^y) - e^{2(t-y)} \end{pmatrix} dy \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t+y)} + e^{2(t-y)} - e^{2(t+y)} + e^{2(t-y)} \\ e^{2(t+y)} - e^{2(t-y)} - e^{2(t+y)} - e^{2(t-y)} \end{pmatrix} dy \\
\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{2(t-y)} \\ -2e^{2(t-y)} \end{pmatrix} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2(t-y)} \\ e^{2(t-y)} \end{pmatrix}_0^t$$
$$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t}+e^{2t} \\ e^{t}-e^{2t} \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan diferensial linear nonhomogen di atas dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan menjadi persamaan diferensial linear koefisien konstan orde dua sebagai berikut:

$$g_1''(t) - 4g_1'(t) + 3g_1(t) = -e^{2t}$$

dengan

$w(x) = x^2 - 4x + 3$	$x_0 = 3$	$m_0 = 1$
$w'(x) = 2x - 4$	$x_1 = 1$	$m_1 = 1$

Selanjutnya, untuk mempermudah pembahasan, cari dahulu hasil kali konvolusinya berdasarkan pada subbab solusi persamaan diferensial linear nonhomogen, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -e^{2t} * e^{xt} &= \int_0^t -e^{2(t-y)} e^{xy}\, dy \\ -e^{2t} * e^{xt} &= -e^{2t} \int_0^t e^{(x-2)y}\, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -e^{2t} * e^{xt} &= -e^{2t} \left[\frac{e^{(x-2)t} - 1}{x-2} \right] \\ -e^{2t} * e^{xt} &= \frac{e^{2t} - e^{xt}}{x-2} \end{aligned}$$

Maka dengan menggunakan persamaan (3.6), didapat solusi untuk $g_1(t)$ adalah:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \Delta_{w(x)}\{-e^{2t} * e^{xt}\} \\ g_1(t) &= \Delta_{w(x)}\{\frac{e^{2t} - e^{xt}}{x-2}\} \\ g_1(t) &= \sum_{i=0}^{1} \frac{e^{2t} - e^{x_i t}}{(x_i - 2)w'(x_i)} \\ g_1(t) &= \frac{e^{2t} - e^{x_0 t}}{(x_0-2)(2x_0-4)} + \frac{e^{2t} - e^{x_1 t}}{(x_1-2)(2x_1-4)} \\ g_1(t) &= \frac{e^{2t} - e^{3t}}{1.2} + \frac{e^{2t} - e^{t}}{-1.(-2)} \\ g_1(t) &= e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} \end{aligned}$$

Lalu dapat dicari turunan pertama dari $g_1(t)$, yaitu:

$$g_1'(t) = 2e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

Kemudian subtitusikan persamaan di atas dengan $g_2(t)$ sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g_2(t) &= g_1'(t) - 2g_1(t) - e^{2t} \\
g_2(t) &= 2e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} - 2\left[e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t}\right] - e^{2t} \\
g_2(t) &= 2e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} - 2e^{2t} - e^{3t} - e^{t} - e^{2t} \\
g_2(t) &= -\frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t}
\end{aligned}$$

Dari hasil di atas dengan menggunakan cara yang berbeda diperoleh solusi persamaan diferensial nonhomogen yang berbeda pula, ini berarti persamaan diferensial nonhomogen dengan menggunakan metode fungsional pembagi beda memberikan solusi yang tidak tunggal.

BAB 5

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut bahwa untuk mencari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan dan sistemnya dapat menggunakan metode fungsional pembagi beda, baik untuk solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen maupun nonhomogen. Sistem persamaan diferensial linear koefisien konstan nonhomogen dengan menggunakan metode fungsional pembagi beda memberikan solusi yang tidak tunggal. Dengan simulasi menggunakan bantuan program *Matlab* juga dapat dicari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstan homogen menggunakan metode fungsional pembagi beda, namun dalam bentuk yang sederhana, yaitu akar-akar dari suku banyak *monic* yang bermultiplisitas satu.

5.2 Saran

Pembahasan laporan ini masih terbatas pada persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan sehingga saran penulis untuk pembaca adalah selanjutnya dapat dikembangkan mencari solusi persamaan diferensial dengan metode lain yang baru yang lebih mudah atau dengan metode yang sama namun menggunakan persamaan diferensial yang lebih umum baik persamaan diferensial nonlinear maupun koefisien yang tidak konstan.

DAFTAR REFERENSI

[1] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1979.

[2] L. Verde-Star, "Solution of linear differential equations by the method of divided differences," *Advances in Applied Mathematics*, vol. 16, pp. 484–508, 1995.

[3] L. Verde-Star, "Operator identities and the solution of linear matrix difference and differential equations," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 91, pp. 153–177, 1994.

LAMPIRAN A

KODE PROGRAM MATLAB : SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR HOMOGEN SEDERHANA

Program Matlab untuk solusi persamaan diferensial linear homogen dengan akar dari persamaan *monic* sederhana, yaitu multiplisitas dari setiap akarnya bernilai satu:

```
n=input('masukan koefisien suku banyak monic' );%contoh: [1 3 2 0] => x^3+3x^2+2x
x=roots(n)%akar dari suku banyak monic
z=multroot(n)%multiplisitas(kelipatan dari akar) bernilai satu

disp('g(t)=')%solusi
for i =1:length(z)
    temp =1;
    for j=1:length(z)
        if(i<j || i>j)
            temp = temp *(z(i,1)- z(j,1));
            %disp(temp);
        end;
        %disp(temp);
    end
    if(i<length(z))%p(untuk suatu polinom)
        disp(['p(', num2str(z(i,1)),')e^',num2str(z(i,1)),'t /',num2str(temp),' +']);
    else
        disp(['p(', num2str(z(i,1)),')e^',num2str(z(i,1)),'t /',num2str(temp)]);
    end;
end
```